**Aufgaben zur linearen Optimierung**

1) a) Kennzeichne jene der folgenden Ungleichungen, die hier grafisch veranschaulicht ist.
□ y ≤ 3
□ 6x - y < 1
□ -6 < - 2x-3y

b) Kennzeichne, jene Zahlenpaare die Elemente der Lösungsmenge sind.

□ (0/0) □ (-1/2) □ (1/2) □ (-3/-3) □ (-3/4) □ (3/1)

 c) Erkläre, wie viele Elemente die Lösungsmenge enthält.

2) Zwei Weinhändler bieten je eine spezielle Sorte von Rot- und Weißwein als Sonderangebot in einem Festzelt an. Die Zahl der an diesem Tag verkauften Weißweinflaschen ist mit x bezeichnet, jene der Rotweinflaschen mit y.
a) Der Weinhändler Weininger kann erfahrungsgemäß bei diesem Fest höchstens 20 Flaschen pro Sorte verkaufen. Er kann an diesem Tag aber nur höchstens 30 Flaschen bei seinem Verkaufsstand unterbringen.
Der Gewinn beträgt bei einer Flasche Weißwein € 1,50 und bei einer Flasche Rotwein € 2,50.
Der Händler möchte die Lieferung so gestalten, dass er maximalen Gewinn hat.
Gib alle notwendigen Ungleichungen an, die diese Bedingungen beschreiben.
Stelle die Gleichung der Zielfunktion für den Gewinn auf.
b) Der Verkauf von Weiß- und Rotweinflaschen des Weinhändlers Fassbinder bei diesem Fest wird durch folgende Grafik veranschaulicht:
Lies die Ungleichungen ab, die den Lösungsbereich bestimmen.
Interpretiere aus der Grafik, wie viele Weißweinflaschen dieser Händler höchstens pro Tag verkaufen kann.
c) Beim Weinhändler Fassbinder (Aufgabe b) beträgt die Zielfunktion für den Gewinn in Euro pro Tag: Z = 2x + 4y.
Bestimme anhand der in b) gegebenen Grafik die Mengen, die zu einem maximalen Gewinn führen.
Berechne den maximalen Gewinn.
Interpretiere die Bedeutung der Zahlen 2 und 4 in der Zielfunktion.

3) Eine Kleiderfabrik stellt Hosen und Röcke her. Täglich kann man 70 Hosen und 100 Röcke nähen, allerdings insgesamt nicht mehr als 140 Stück.
Die Herstellungskosten betragen € 20 für eine Hose und € 15 für einen Rock.
Der Verkaufspreis je Hose beträgt € 45 und je Rock € 35.
Berechne, wie viele Röcke und Hosen täglich gefertigt werden sollen, wenn man maximalen Gewinn anstrebt.

4) Eine Automobilfabrik erzeugt Personenkraftwagen der Marke „Bendis“ und Motorräder der Marke „Dolos“. Pro Monat können höchstens 600 Bendis hergestellt werden. Insgesamt kann die Fabrik nicht mehr als 800 Fahrzeuge pro Monat herstellen. Die Reifenfabrik kann höchstens 2600 Reifen pro Monat liefern. Bei einem Fahrzeug der Type Bendis werden € 3.000, bei einem Fahrzeug der Type Dolos € 2.000 verdient.

1. Stelle das Ungleichungssystem auf, das für die Herstellung der beiden Produkte zu berücksichtigen ist. Beachte dabei, dass die Firmenleitung einen möglichst großen Monatsgewinn machen möchte.
2. Eine andere Automobilfabrik erzeugt ebenfalls „Bendis“ und „Dolos“. Die folgende Grafik beschreibt die Situation dieser Fabrik.
Die Zielfunktion lautet:


Ermittle grafisch, wie viel Stück jeder Marke produziert werden müssen, damit der Gewinn maximal wird. Berechne den maximalen Gewinn.

1. Nach einer Umstrukturierung ergeben sich für den Planungsbereich und die Zielfunktion neue Bedingungen.
Begründe, warum es hier keine eindeutige Lösung gibt.
Gib mindestens zwei mögliche
Lösungen an.

5) Ein Goldschmied stellt 2 Arten von Armbändern her. A, B. Jedes Band soll mindestens 10 g Gold enthalten. A enthält mindestens 20 g Silber und 10 Diamantsplitter, B enthält mindestens 50 g Silber und 40 Diamantsplitter.
Der Goldschmied erhält dafür 207 g Gold, 600 g Silber und 450 Splitter.
Fertigungszeit : 46 Stunden laut Vertrag.
A benötigt 3 Stunden, B 2 Stunden Arbeitszeit.
Erlös: € 200 für A, € 270 für B.
Nicht benötigte Materialien müssen zurückgegeben werden.
Berechne, wie viele Armbänder der Goldschmied herstellen soll, damit der Erlös maximal ist.
Bestimme, wie viel Material zurück gegeben werden muss.

6) Eine kleine Fluglinie erhält von einem Reiseunternehmen den Auftrag, für ein Urlaubsprogramm täglich mindestens 600 Personen sowie zusätzlich min. 12000 kg Nutzlast zu befördern. Um diesen Auftrag zu erfüllen, muss die Fluglinie Flugzeuge mieten. Zur Auswahl stehen 2 Typen:
Typ A kann höchstens 40 Personen sowie 1000 kg Nutzlast befördern.
Typ B kann höchstens 56 Personen sowie 800 kg Nutzlast befördern
Die Mietkosten betragen € 40.000 für das Flugzeug Typ A und € 50.000 für das Flugzeug Typ B jeweils pro Maschine. Die folgende Skizze zeigt den mathematischen Sachverhalt.
a) Argumentiere, ob das Ziel der Kostenminimierung erreicht werden kann, wenn 10 Flugzeuge Typ A und 10 Flugzeuge Typ B zur Verfügung stehen.
b) Bestimme, wie viel von jedem Typ man mieten soll, wenn die Miete möglichst günstig sein soll.
c) Argumentiere, ob der Auftrag bewältigt werden kann, wenn nur 3 Flugzeuge Typ A und 10 Flugzeuge Typ B zur Verfügung stehen.
d) Erkläre, was sich an der Lösung ändert, wenn sich die Mietkosten vom Flugzeug Typ A von € 40.000 auf € 30.000 reduzieren.

**Ergebnisse:**

1a) ‐6 < ‐ 2x‐3y b) (0/0); (-1/2): (‐3/‐3) c) Unendlich viele Lösungspaare. Eine Gerade ist unendlich lang, daher ist die Halbebene unbegrenzt und enthält somit unendlich viele Zahlenpaare d.h. Punkte 2a) *x* ≥ 0, *x* ≤ 20, *y* ≥ 0, *y* ≤ 20, *x* + *y* ≤ 30, *Z* = 1,5*x* + 2,5*y* -> max b) *x* ≥ 0; *y* ≥ 0, *x* ≤ 30, *y* ≤ 50, *x* + *y* ≤ 60; höchstens 30 Flaschen Weißwein c) 10 Fl. W., 50 Fl. R, Gewinn: € 220; 2 bedeutet € 2 Gewinn pro Flasche Weißwein, 4 bedeutet € 4 Gewinn pro Flasche Rotwein 3) 70 Hosen, 70 Röcke, Gewinn = € 3150 4a) ; ; ; ; ;
b) Bendis: 500 Stück; Dolos: 400 Stück; GMax.=700.000 €; c) Zielfunktion und Gerade durch D und E sind parallel; mögliche Lösungen: 400 Bendis und 600 Dolos oder 500 Bendis und 300 Dolos oder 600 Bendis und keine Dolos 5) A: 10 Stk, B : 8 Stk, Rückgabe: 27 g Gold, kein Silber, 30 Diamantensplitter 6a) Wenn man je 10 Flugzeuge anmietet, dann ist die Auslastung nicht optimal und die Mietkosten sind zu hoch: € 900.000 b) Aus der Grafik entnimmt man, dass es am besten wäre, wenn man 8 Flugzeuge vom Typ A und 5 Flugzeuge vom Typ B mietet. Die Mietkosten betragen in diesem Fall € 570 000. c) Mit 3 Flugzeugen Typ A und 10 Flugzeugen Typ B kann der Auftrag nicht erfüllt werden. Der Punkt (3/10) liegt außerhalb des Lösungsbereichs, das bedeutet, dass die geforderte Menge der Personen oder der Nutzlast damit nicht transportiert werden kann. d) Die Kostenfunktion verläuft dadurch flacher, das bedeutet, dass nun die optimalen

Mietkosten mit 15 Flugzeugen nur des Typs A zu erreichen sind: € 450 000

7 a) Bauer Kalb hat 45 ha Land für den Anbau von x ha Braugerste und y ha Zuckerrüben zur Verfügung.
Für die Frühjahrsarbeiten sind bei Braugerste 50 Stunden, bei Zuckerrüben 110 Stunden je Hektar erforderlich. Während dieser Zeit stehen insgesamt 2800 Stunden zur Verfügung. Für die Erntearbeit sind bei der Braugerste
50 Stunden, bei den Zuckerrüben 80 Stunden je Hektar notwendig. Während dieser Zeit stehen insgesamt 2000 Stunden zur Verfügung.
Wegen des notwendigen Fruchtwechsels dürfen nicht mehr als 20 Hektar Braugerste angebaut werden.
Gib alle Nebenbedingungen an, die folgendes Optimierungsproblem beschreiben.
b) Bauer Dietrich baut x ha Mais und y ha Weizen an.
Das folgende Ungleichungssystem beschreibt seine Produktionsbeschränkungen.

;
Stelle den Lösungsbereich grafisch dar.
Argumentiere, ob Bauer Dietrich 40 ha Mais und 10 ha Weizen anbauen kann.
c) Der Lösungsbereich von Bauer Müller ist in der folgenden Grafik dargestellt.



Der Gewinn bei einem Hektar Gerste beträgt € 400, bei einem Hektar Zuckerrüben € 1600. Die Fläche soll so genutzt werden, dass der Gesamtgewinn maximal wird.
Stelle die Zielfunktion auf.
Berechne, wie viel Hektar Braugerste und wie viel Hektar Zuckerrüben der Bauer anbauen soll, damit der Gewinn maximal wird.
Berechne seinen Gewinn.
Durch neue Förderrichtlinien erhöht sich der Gewinn pro Hektar Gerste auf
€ 600, bei Zuckerrüben fällt er auf € 1200.
Argumentiere, ob Bauer Müller nun seinen Bebauungsplan ändern soll.

Lösung:

7a) ; ; ; ; ; b)

b) Nein, da der Punkt außerhalb des Lösungsbereichs liegt

c) Z=400x+1600y; 20 ha Braugerste, 15 ha Zuckerrüben;

GMAX = € 32.000 die vorhandene Arbeitszeit reicht nicht aus;

ZNEU=600x+1200y GMAX nun bei 40 ha Gerste und 8 ha Zuckerrüben

8) Für zwei unterschiedliche Produkte P1 und P2, die jeweils drei verschiedene Abteilungen durchlaufen, sind die Fertigungszeiten und die zeitliche Kapazität der Abteilungen in Minuten pro Tag in der folgenden Tabelle ersichtlich:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Abteilung | Fertigung P1 | Fertigung P2 | Kapazität/Tag |
| A1 | 1 Minute | 3Minuten | 13 Minuten |
| A2 | 7 Minuten | 1. Minuten
 | 50 Minuten |
| A3 | 7 Minuten | 12 Minuten | 90 Minuten |

1. Stelle für diesen Fall das Ungleichungssystem für alle Arbeitsbedingungen (Restriktionen) auf.
2. Zwei weitere Produkte P3 und P4, laufen in anderen drei Abteilungen durch, wobei die Tageskapazitäten für A1 100 Minuten, für A2 490 Minuten und für A3 600 Minuten pro Tag betragen. Für diese Produkte liegt die nebenstehende Grafik mit angezeigter Lösungsmenge vor.

Lies die Gleichung der linearen Funktionen a aus der Grafik ab.
Interpretiere die Grafik in ihrer Aussage über die Produktionsdauer der beiden Produkte in den einzelnen Abteilungen, wenn a Abteilung A1 beschreibt.

1. Der Verkaufspreis beträgt € 12,50 pro Stück des Produkts P3 und € 10 pro Stück von P4.
Die Herstellungskosten belaufen sich auf € 9,50 (P3) bzw. € 4 pro Stück (P4).
Berechne die Mengen von P3 und P4, die einen optimalen Tagesgewinn sicherstellen, und ermittle diesen Gewinn.

Lösung:

8a) a: x+ 3y ≤ 13; b: 7x + 10y ≤ 50; c: 15x + 12y ≤ 90; *x* ≥ 0; *y* ≥ 0
b) 8x + 20y ≤100;
Das Produkt P3 bleibt in A1 8 Minuten. Das Produkt P4 bleibt in A1 20 Minuten.
c) Es sollen 5 Stück von P3 und 3 Stück von P4 hergestellt werden, das ergibt einen Tagesgewinn von € 39

9) Im Monat benötigt ein Mensch mindestens 600 mg Vitamin B und 300 mg Vitamin H. Um diesen Bedarf für die 30 Mitarbeiter einer Forschungsstation in der Antarktis zu decken, kann der leitende Arzt zwei verschiedene Präparate einsetzen.
In einer Tablette VitaVita sind 30 mg Vitamin B und 10 mg Vitamin H enthalten. In einer Tablette Bellavit sind 10 mg Vitamin B und 20 mg Vitamin H enthalten. Die Packung VitaVita mit 50 Tabletten kostet € 6, die Packung Bellavit mit 100 Tabletten € 8.
Der Einsatz auf der Forschungsstation dauert fünf Monate.
Berechne, wie viele Packungen der beiden Medikamente der Arzt bestellen muss, um den Bedarf mit möglichst geringen Kosten abzudecken.

Lösung:

9) 54 Packungen Vitavita, 9 Packungen Bellavit